XIII - GAZ PARFAIT DE BOSONS
B- Gaz de photons

Le rayonnement électromagnétique contenu dans une enceinte sera décrit par un gaz de photons (particules sans masse animées de la vitesse c de la lumière). Les photons n'ont pas d'interactions mutuelles, donc ils forment toujours un gaz parfait. Du fait des interactions avec les parois du récipient, il y a continuellement création et annihilation de photons : le nombre de photons dans une enceinte donnée n'est donc pas constant. Le paramètre de Lagrange α qui tenait compte de la condition $\sum n_i = N$ n'existe pas ; un moyen de prendre en compte cette situation est de prendre $\alpha = 0$. On a donc toujours $z = 1$ pour les photons (ou, ce qui est équivalent, $\mu = 0$; le potentiel chimique d'un gaz de photons est toujours nul). A l'équilibre l'occupation du niveau d'énergie ε_i s'écrit alors sous la forme :

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\beta\varepsilon_i} - 1}$$

Le grand potentiel Ω devient égal à l'énergie libre de Helmoltz F :

$$\Omega = U - TS - N\mu = U - TS = F = kT\sum_i g_i Log\left(1 - \exp(-\beta\varepsilon_i)\right)$$

1- Niveaux d'énergie :

Considérons un photon dans une boite cubique, de côté a. Sa fonction d'onde Ψ satisfait à l'équation de propagation suivante, déduite des équations de Maxwell :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

On écrit Ψ sous une forme séparable : $\Psi(x,y,z,t) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)\psi_4(t)$

L'équation des ondes s'écrit sous la forme :

$$\psi_1''(x)\psi_2(y)\psi_3(z)\psi_4(t) + \psi_1(x)\psi_2''(y)\psi_3(z)\psi_4(t) + \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3''(z)\psi_4(t) = \frac{1}{c^2}\psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)\psi_4''(t)$$

En divisant les deux membres par $\Psi(x,y,z,t)$, nous avons :

$$\frac{\psi_1''(x)}{\psi_1(x)} + \frac{\psi_2''(y)}{\psi_2(y)} + \frac{\psi_3''(z)}{\psi_3(z)} = \frac{1}{c^2}\frac{\psi_4''(t)}{\psi_4(t)}$$

Le membre de droite est une fonction de (x,y,z) ; le membre de gauche est une fonction de t. Pour que ces deux membre soient égaux, il faut qu'ils soient tous les deux égaux à une constante que nous prendrons $-(\omega/c)^2$.

La fonction temporelle $\psi_4(t)$ a alors la forme suivante :

$$\psi_4(t) = \exp(i\omega t)$$

En adoptant la même méthode de séparation des variables, nous voyons que la fonction d'espace $\psi_1(x)$ satisfait à l'équation différentielle suivante :

$$\psi_1''(x) + k_x^2\psi_1(x) = 0$$

La solution est de la forme :

$$\psi_1(x) = A\exp(ik_x x) + B\exp(-ik_x x)$$

Sachant que la fonction d'onde est nulle en $x = 0$ et en $x = a$, on a :

$$k_x = n_x\frac{\pi}{a}$$

Nous avons des expressions similaires pour $\psi_2(y)$ et $\psi_3(z)$. Le vecteur d'onde $\vec{k}$ est tel que :

$$\vec{k} = \frac{\pi}{a}\left(n_x, n_y, n_y\right)$$

où les nombres n_x, n_y et n_z sont des entiers. Sachant que $p = \hbar k$ et que $\varepsilon = pc$, l'énergie s'écrit :

$$\varepsilon = \frac{\hbar \pi c}{a}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \varepsilon_0 \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Les niveaux d'énergie sont séparés de la quantité ε_0. Pour une boîte macroscopique cubique de volume un litre, cette quantité vaut :

$$\varepsilon_0 \approx 10^{-24}\, joules \approx 10^{-5}\, eV$$

Les niveaux sont donc très serrés ; on peut remplacer la sommation sur les niveaux d'énergie par une intégration sur l'espace des phases permis, en comptant un état par volume h^3 de l'espace des phases. De plus, il faut inclure une dégénérescence de spin, qui est dans ce cas $g = 2$ (les photons ont un spin $S = 1$, on pourrait donc s'attendre à une dégénérescence $g = 3$ mais, en fait, la composante longitudinale n'est pas présente car les ondes électromagnétiques sont transversales).
0n a donc :

$$g_i \to \frac{2d^3 r d^3 p}{h^3}$$

2- Fonctions thermodynamiques :
L'énergie libre de Helmoltz a pour expression:

$$F = kT \iint \frac{2d^3 r d^3 p}{h^3} Log\left(1 - \exp(-\beta pc)\right)$$

En effectuant l'intégration sur les variables de positions et sur les angles θ et φ d'orientation de l'impulsion $\vec{p}$, nous avons :

$$F = \frac{8\pi VkT}{h^3} \int_0^\infty p^2 Log\left(1 - e^{-\beta pc}\right) dp$$

En intégrant par parties, nous avons :

$$F = -\frac{8\pi Vc}{3h^3} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{\exp(\beta pc) - 1}$$

En utilisant la variable $x = \beta pc$, nous avons :

$$F = -\frac{8\pi V k^4 T^4}{3h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1}$$

Sachant que :

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

Nous pouvons écrire :

$$F = -\frac{a}{3} V T^4$$

où la constante a est donnée par l'expression :

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} = 7{,}5 10^{-16}\, SI$$

Connaissant l'expression de l'énergie libre de Helmoltz, on peut en déduire l'expression des autres grandeurs thermodynamiques. Expression de l'entropie :

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{4}{3} a V T^3$$

Pression du gaz de photons (ou pression de radiation):

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{1}{3} a T^4$$

L'énergie interne est :

$$U = F + TS = aVT^4$$

L'énergie interne par unité de volume :

$$u = aT^4$$

La capacité calorifique à volume constant est :

$$C_V = 4aVT^3$$

On remarquera que :

i) la pression de radiation P ne dépend que de la température.

ii) la relation $PV = \frac{1}{3}U$ que nous avons montrée pour un gaz de photons est satisfaite.

iii) La pression de radiation est très faible à température ambiante : $P \approx 10^{-6}\, N/m^2$ (elle est négligeable comparée à la pression atmosphérique $P_0 \approx 10^5\, N/m^2$) . Mais, dans les étoiles où la température est très élevée ($T \approx 10^7 \,°K$) la pression de radiation peut devenir plus importante que la pression cinétique.

3- Nombre moyen de photons:

Le nombre de photons varie continuellement. On peut néanmoins en définir un nombre moyen ; Il est donné par la relation :

$$N = \sum_i \frac{g_i}{\exp(\beta\varepsilon_i) - 1} = \iint \frac{2d^3r d^3p}{h^3} \frac{1}{\exp(\beta pc) - 1}$$

En intégrant sur les variables position et les angles d'orientation de $\vec{p}$, nous avons :

$$N = \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp(\beta pc) - 1} = \frac{8\pi V k^3 T^3}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\exp(x) - 1}$$

Sachant que :

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\exp(x) - 1} = 2.404$$

En introduisant la constante a précédente, nous pouvons écrire :

$$N = 0.37 aVT^3 / k$$

Nous constatons que nous pouvons écrire que :

$$S = 3{,}60\, Nk$$

4- Loi de Planck :

Le nombre de photons dont le vecteur position est compris entre $\vec{r}$ et $\vec{r} + d\vec{r}$ et le vecteur impulsion entre $\vec{p}$ et $\vec{p} + d\vec{p}$ est :

$$d^6 N = \frac{2d^3r d^3p}{h^3} \frac{1}{\exp(\beta pc) - 1}$$

Nombre de photons dont le module de l'impulsion est compris entre p et $p + dp$:

$$dN_p = \frac{8\pi V}{h^3} \frac{p^2 dp}{\exp(\beta pc) - 1}$$

Sachant que l'énergie du photon est telle que $\varepsilon = h\nu = pc$, le nombre de photons de fréquence comprise entre ν et $\nu + \mathrm{d}\nu$ est :

$$dN_\nu = \frac{8\pi V}{c^3}\frac{\nu^2 d\nu}{\exp(\beta h\nu)-1}$$

Chaque photon transporte une énergie $h\nu$; l'énergie des photons dont la fréquence est comprise entre ν et $\nu + d\nu$ est donc :

$$dU_\nu = h\nu dN_\nu = \frac{8\pi hV}{c^3}\frac{\nu^3 d\nu}{\exp(\beta h\nu)-1}$$

La densité spectrale ou énergie entre ν *et* $\nu + d\nu$ par unité de volume et unité de fréquence est :

$$\rho_\nu = \frac{1}{V}\frac{dU\nu}{d\nu} = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp(\beta h\nu)-1}$$

C'est la formule de Planck.

*pour $\beta h\nu \prec\prec 1$ (basses fréquences ou hautes températures) on a :

$$\rho_\nu = \frac{8\pi kT}{c^3}\nu^2$$

C'est la loi de Rayleigh-Jeans ; c'est une loi classique car elle ne contient pas la constante $\hbar$.

*pour $\beta h\nu \succ\succ 1$ (hautes fréquences ou basses températures), ρ_ν s'écrit :

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 \exp(-\beta h\nu)$$

On retrouve la loi de Wien. (C'est une loi quantique).

En utilisant la variable $x = \beta h\nu$, nous pouvons écrire :

$$\rho_\nu = \frac{8\pi k^3 T^3}{h^2 c^3} y(x),$$

la fonction $y(x)$ étant telle que :

$$y(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}.$$

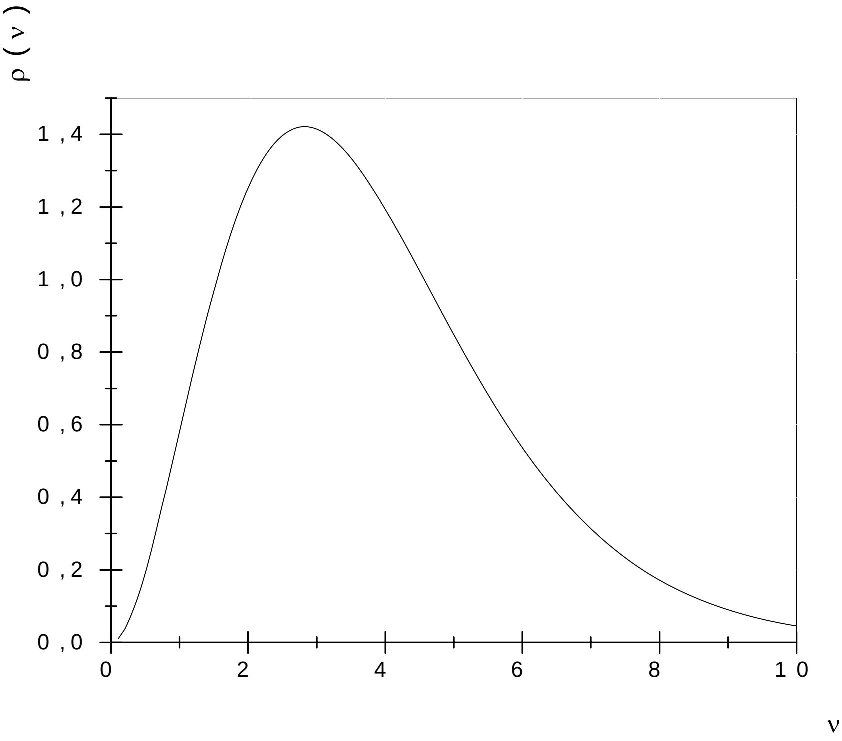
Cette fonction est maximale (dérivée nulle) pour :

$$x = 2.82$$

Sa valeur maximale est :

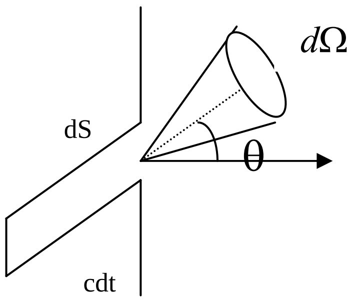
$$y_m = 1.42$$

Cette fonction est représentée sur la courbe ci-après.



D e n s i t é s p e c t r a l e d ' é n e r g i e

5- Rayonnement du corps noir :



Considérons un orifice de surface dS dans une enceinte de volume V, en équilibre thermique à la température T. On se propose de déterminer l'énergie qui sort par rayonnement à travers dS pendant le temps dt. Les photons qui sortent à travers dS pendant le temps dt dans l'angle solide $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ sont ceux qui se trouvent dans le volume $cdtdS\cos\theta$. Le rayonnement étant isotrope, le nombre de photons par unité de volume, d'énergie entre p et $p+dp$ et pointant leur vecteur vitesse dans l'angle solide $d\Omega$ est :

$$d^3 n_{p,\Omega} = \frac{2}{h^3 c^3} \frac{p^2 dp}{\exp(\beta pc) - 1} d\Omega$$

Le nombre de photons dont l'impulsion est comprise entre p et $p+dp$, pointant leur vecteur vitesse dans l'angle solide $d\Omega$ et sortant par l'orifice dS pendant le temps dt est :

$$dN = cdtdS\cos\theta \frac{2\pi p^2 dp}{h^3} \frac{1}{\exp(\beta pc) - 1} d\Omega$$

Chaque photon transporte une énergie $\varepsilon = pc$; l'énergie qui sort à travers dS pendant le temps dt est :

$$dE = pcdN$$

L'énergie rayonnée par unité de temps et par unité de surface est l'émittance radiative ; elle est donnée par la relation :

$$\mathrm{E} = \frac{4\pi\, c^2}{h^3} \int_0^\infty dp \int_0^{\pi/2} d\theta \cos\theta \sin\theta \frac{p^3}{\exp(\beta pc) - 1}$$

L'intégration sur l'angle θ (de zéro à $\pi/2$ seulement pour avoir des particules qui sortent) donne :

$$\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{2}$$

L'intégrale est alors :

$$\mathrm{E} = \frac{2\pi c^2}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^3}{\exp(\beta pc) - 1} dp$$

Nous pouvons écrire l'énergie E sous la forme :

$$\mathrm{E} = \frac{cU}{4V} = \sigma T^4$$

C'est la loi de Stéfan. La constante σ a pour expression **:**

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2}$$

Numériquement, elle vaut :

$$\sigma = 5.7 \times 10^{-8}\, SI$$