## XI - STATISTIQUE DES ETOILES NAINES BLANCHES

Historiquement, c'est la première utilisation de la statistique de Fermi-Dirac (1926) . En astrophysique, une règle empirique est que la brillance d'une étoile est proportionnelle à sa couleur (longueur d'onde prédominante) : une étoile de couleur rouge n'est pas brillante, tandis qu'une étoile blanche est brillante ( voir le diagramme de Hertzsprung – Russel ci-dessous ). Les géantes rouges et les naines blanches constituent des exceptions à cette règle générale. La raison de cet état de fait est :
i)Les géantes rouges sont des étoiles relativement jeunes, dont le constituant est principalement de l'hydrogène ; les réactions thermonucléaires se font à grande vitesse, ce qui donne une grande brillance.
ii)Les naines blanches sont de vieilles étoiles, constituées principalement d'hélium ; les réactions thermonucléaires se font à faible vitesse, ce qui donne une étoile de faible brillance.

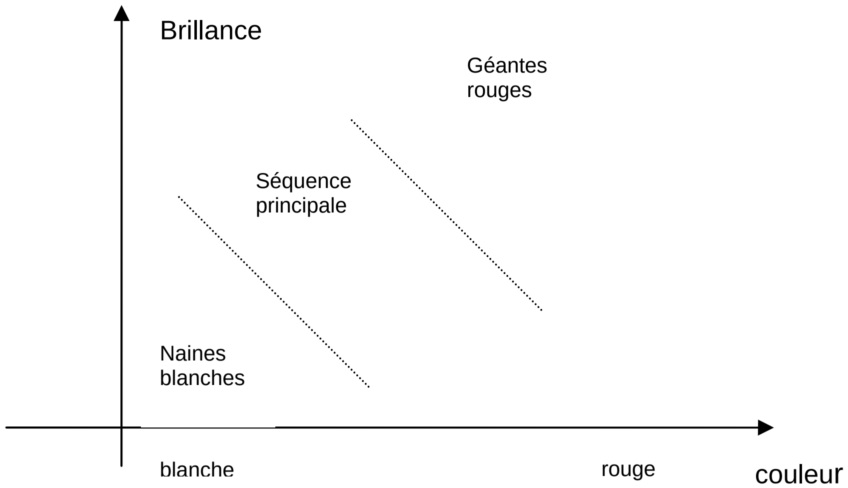



Diagramme de Hertzsprung-Russel

Une étoile naine blanche, dans un modèle simplifié, est représentée par une masse $M \approx 10^{30} Kg$ d'hélium (pour comparaison, la masse du soleil es $M_S = 2\,10^{30} Kg$), dans une sphère de haute densité $\rho \approx 10^{10} Kg/m^3$ à une température centrale $T \approx 10^7 {}^\circ K$. A cette température, l'énergie d'agitation thermique est de l'ordre de 1 $KeV$. Cette énergie est nettement plus élevée que l'énergie d'ionisation de l'atome d'hélium , de l'ordre de 28 eV; on considérera donc que tout l'hélium de l'étoile est ionisé. L'étoile est ainsi composée de $N$ électrons libres, et de $N/2$ noyaux d 'hélium.
La masse de l'étoile est :

$$M = N\left(m + 2m_p\right) \approx 2Nm_p$$

où $m$ est la masse d'un électron et $m_p$ la masse d'un proton.
La densité d'électrons est :

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\rho}{2m_p} \approx 10^{37} e/m^3$$

L'énergie de Fermi de ce système vaut :

$$\varepsilon_F = \left(\frac{6\pi^2 n}{g}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \approx 10^6 eV$$

Cette valeur est plus grande que l'énergie de masse de l'électron ( $0.511 MeV$) ; ceci entraîne que la dynamique des électrons est relativiste.

La température de Fermi vaut :

$$T_F = \frac{\varepsilon_F}{k} \approx 10^{10\circ} K$$

On a ainsi : $\frac{T}{T_F} \approx 10^{-3}$. Le gaz de fermions est, statistiquement, dans un état de dégénérescence complète. La pression cinétique des noyaux d'hélium et la pression de radiation ( beaucoup plus faibles que la pression cinétique des électrons ) seront négligées. Nous négligerons aussi la variation spatiale de la densité électronique. Bien que nous ayons fait beaucoup de simplifications, nous obtenons des résultats qui sont en accord avec l'expérience, au moins qualitativement.

Le gaz étant macroscopique, les niveaux d'énergie sont très serrés ; nous utiliserons l'approximation de statistique classique : nous avons un état par volume $h^3$ de l'espace des phases :

$$N = \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{8\pi V}{h^3} p_F^3$$

L'impulsion de Fermi $p_F$ est donnée par:

$$p_F = \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{1/3} h$$

L'énergie cinétique d'une particule relativiste d'impulsion $p$ et de masse au repos $m$ est :

$$\varepsilon = mc^2 \left[ \left(1 + (p/mc)^2\right)^{1/2} - 1 \right]$$

La vitesse d'une particule est telle que :

$$v = \frac{d\varepsilon}{dp} = c \frac{p/mc}{\left[1 + (p/mc)^2\right]^{1/2}}$$

L'énergie cinétique totale du gaz est donnée par la relation :

$$E_0 = \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} mc^2 \left[ \left(1 + (p/mc)^2\right)^{1/2} - 1 \right] p^2 dp$$

La pression cinétique du gaz d'électrons est :

$$P_0 = \frac{1}{3}\frac{N}{V}\langle pv \rangle = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} mc^2 \frac{(p/mc)^2}{\left[1 + (p/mc)^2\right]^{1/2}} p^2 dp$$

Introduisons la variable sans dimensions $\theta$ telle que :

$$p = mc\, sh(\theta)$$

On a ainsi :

$$\varepsilon = mc^2 [ch(\theta) - 1] \quad \text{et} \quad v = c\, th(\theta)$$

Nous avons alors :

$$N = \frac{8\pi V m^3 c^3}{3h^3} sh^3(\theta_F)$$

$$E_0 = \frac{8\pi V m^4 c^5}{h^3} \int_0^{\theta_F} (ch(\theta) - 1) sh^2(\theta) ch(\theta) d\theta$$

$$P_0 = \frac{8\pi V m^4 c^5}{3h^3} \int_0^{\theta_F} sh^4(\theta) d\theta$$

En posant $x = sh(\theta_F) = \frac{p_F}{mc}$, nous avons :

$$N = \frac{8\pi V m^3 c^3}{3h^3} x^3$$

$$E_0 = \frac{\pi V m^4 c^5}{h^3} B(x)$$

$$P_0 = \frac{\pi V m^4 c^5}{3h^3} A(x)$$

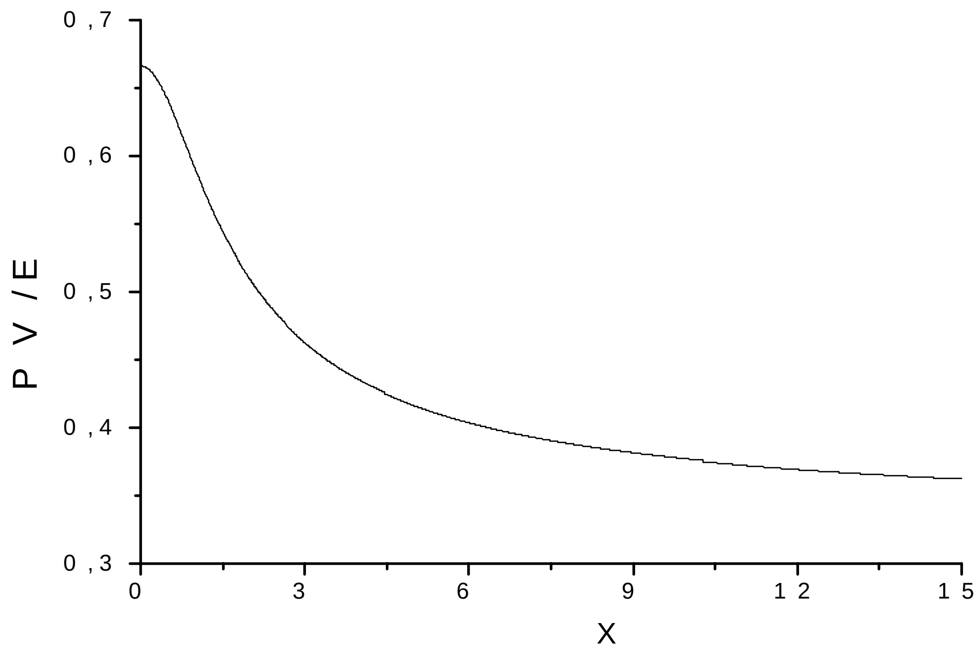
Les fonctions $A(x)$ et $B(x)$ sont telles que :

$$A(x) = x\left(x^2+1\right)^{1/2}\left(2x^2-3\right) + 3sh^{-1}(x)$$

$$B(x) = 8x^3\left\{\left(x^2+1\right)^{1/2} - 1\right\} - A(x)$$

Les fonctions $A(x)$ et $B(x)$ sont déterminées numériquement pour n'importe quelle valeur de $x$ ; des comportements asymptotiques sont parfois utiles :

$$x \prec\prec 1 \Rightarrow \begin{cases} A(x) \approx \frac{8}{5} x^5 \\ B(x) \approx \frac{12}{5} x^5 \end{cases} \qquad x \succ\succ 1 \Rightarrow \begin{cases} A(x) \approx 2x^4 - 2x^2 \\ B(x) \approx 6x^4 - 8x^2 \end{cases}$$




Nous avons : $\frac{P_0 V}{E_0} = \frac{A(x)}{B(x)}$

Ce rapport tend vers la valeur $2/3$ lorsque $x \to 0$ (cas non relativiste) ; il tend vers la valeur $1/3$ lorsque $x \to \infty$ (cas relativiste extrême : photons). Il varie uniformément de la valeur $2/3$ à la valeur $1/3$, comme le montre la figure précédente.

Considérons maintenant la stabilité d'une naine blanche. Le gaz de l'étoile est soumis principalement à deux effets antagonistes : une agitation thermique ou pression cinétique qui le pousse vers l'extension, et une attraction gravitationnelle qui a tendance à le comprimer. On a supposé que le gaz est distribué avec une densité constante $n$ dans une sphère de rayon $R$. Quand le rayon varie de la quantité $dR$ **:**

- l'énergie cinétique du gaz varie de la quantité $dE_C = -P_0 dV = -P_0(R) 4\pi R^2 dR$
- l'énergie potentielle gravitationnelle varie de : $dE_g = \alpha \dfrac{GM^2}{R^2} dR$

où $G$ est la constante gravitationnelle,
M la masse de l'étoile,
$\alpha$ est un paramètre, proche de l'unité, ajustable pour tenir compte de la non uniformité de la densité de l'étoile.
Quand l'étoile est en équilibre, la variation d'énergie totale et nulle :

$$dE_C + dE_g = 0$$

ce qui entraîne :

$$P_0(R) = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4}$$

En écrivant la variable $x$ sous la forme :

$$x = \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{1/3} \frac{h}{mc} = \left(\frac{9\pi M}{8m_p}\right)^{1/3} \frac{\hbar / mc}{R}$$

En utilisant l'expression de $A(x)$, nous avons :

$$A\left\{\left(\frac{9\pi M}{8m_p}\right)^{1/3} \frac{\hbar / mc}{R}\right\} = 6\pi\alpha \left(\frac{\hbar / mc}{R}\right)^3 \frac{GM^2 / R}{mc^2}$$

Cette égalité est la relation masse-rayon. Elle est obtenue par une combinaison de mécanique quantique, de relativité et de gravitation. Elle utilise des paramètres sans dimension qui sont des rapports de :

- la masse de l'étoile à la masse du proton,
- le rayon de l'étoile à la longueur d'onde Compton de l'électron,
- l'énergie gravitationnelle de l'étoile à l'énergie de masse au repos de l'électron.

Au vu de la complexité de cette relation, nous voyons que nous ne pouvons pas exprimer le rayon de l'étoile comme fonction explicite de sa masse, sauf dans les cas extrêmes.

Sachant que $M \approx 10^{30} Kg$, $x$ est de l'ordre de l'unité lorsque $R \approx 10^6 m$. Les cas extrêmes sont définis de la manière suivante :

a) $R \succ\succ 10^6 m$. On a $x \prec\prec 1$ et donc : $A(x) \approx \dfrac{8}{5} x^5$ ce qui entraîne :

$$R \approx \frac{3(9\pi)^{2/3}}{40\alpha} \frac{\hbar^2 M^{-1/3}}{Gmm_p^{5/3}}$$

b) $R \prec\prec 10^6 m$ soit $x \succ\succ 1$. On a : $A(x) \approx 2x^4 - 2x^2$. Ceci entraîne :

$$R \approx \frac{(9\pi)^{1/3}}{2} \frac{h}{mc} \left(\frac{M}{m_p}\right)^{1/3} \left\{1 - \left(\frac{M}{M_0}\right)^{2/3}\right\}$$

avec : $M_0 = \frac{9}{64}\left(\frac{3\pi}{\alpha^3}\right)^{1/2} \frac{(\hbar c/G)^{3/2}}{m_p^2}$

Nous voyons que plus la masse de l'étoile est grande , plus le rayon sera petit. Et surtout, il existe une masse limite $M_0$ pour laquelle le rayon de l'étoile est nul. La relation masse – rayon n'a pas de solution pour $M \geq M_0$. Nous en concluons que toutes les étoiles naines blanches ont une masse inférieure à $M_0$ : ce fait est vérifié par l'expérience. Ceci s'explique par le fait que, au-dessus d'une certaine masse, la pression du gaz est insuffisante pour résister à l'effondrement gravifique . La masse limite $M_0$ est appelée limite de Chandrasekhar. Des études détaillées ont conduit à la limite:

$$M_0 = 1.44 M_S$$

où $M_S$ est la masse du Soleil $\left(M_S = 2\times 10^{30}\,Kg\right)$.